

Gustavo Fonseca do Prado

Superfícies orientáveis e não orientáveis

Florestal, MG
Julho 2026

Gustavo Fonseca do Prado

Superfícies orientáveis e não orientáveis

Relatório de Iniciação Científica, apresentado ao
projeto Irerê.
Orientador: Augusto Meireles Vargas.

“Faça ou não faça, tentativa não há”. (Mestre Yoda)

RESUMO

O objetivo geral deste projeto é buscar classificar superfícies regulares orientáveis e não orientáveis em $\mathbb{R}^3$. Buscando destacar a definição de superfícies regulares e a definição de orientabilidade em superfícies regulares, bem como a exibição de alguns exemplos de superfícies orientáveis e não orientáveis. Para isso, definiremos conceitos, definições e teoremas necessários para a compreensão do conteúdo a ser tratado. Tendo em vista o estudo dessas superfícies, apresentaremos a importância de sua caracterização como orientáveis e não orientáveis, assim como suas devidas aplicações.

Palavras-chave: curvas; superfícies regulares; superfícies regulares orientáveis não orientáveis.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Gráfico da curva parametrizada $\alpha(x) = (x, x)$	9
2.2	Plano Tangente	11
2.3	Representação geométrica de um vetor tangente $\alpha'(0)$ a uma superfície S no ponto p	11
2.4	Representação geométrica do vetor normal unitário local N em relação aos vetores tangentes x_u e x_v no ponto p	12
2.5	A Aplicação de Gauss	13
2.6	Distribuição uniforme de curvatura Gaussiana positiva em uma esfera regular. .	15
2.7	Regiões de curvatura positiva (externa) e negativa (interna) que se anulam na integração do Toro.	16
3.1	Representação geométrica tridimensional de um toro de revolução regular. . . .	20
3.2	Representação geométrica tridimensional da esfera unitária no espaço euclidiano.	20
3.3	Faixa de Möbius	21
3.4	A Garrafa de Klein	22

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	DESENVOLVIMENTO	9
2.1	Curva Parametrizada Diferenciável	9
2.1.1	Curva Regular	9
2.1.2	Mudança de Orientação em Curvas	10
2.2	Superfície Regular	10
2.2.1	Teorema da Imagem Inversa	10
2.3	Plano Tangente	10
2.3.1	Orientação de um Espaço Vetorial	11
2.3.2	Vetor Tangente	11
2.3.3	Vetor Normal Unitário Local	12
2.4	Orientação de Superfícies	12
2.4.1	Proposição 1	12
2.4.2	Teorema de Samelson	13
2.5	A Aplicação de Gauss	13
2.5.1	Curvatura	13
2.6	Característica Euler-Poincaré	14
2.7	Teorema Gauss-Bonet Global	14
2.7.1	Corolário a respeito do Teorema Gauss-Bonet Global	14
3	SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS E NÃO ORIENTÁVEIS	19
3.1	Exemplos	19
3.1.1	O toro	19
3.1.2	A esfera	20
3.1.3	A faixa de möbius	20
3.2	A faixa de möbius e a conexão com o Teorema de Samelson	21
3.3	A Garrafa de Klein	22
4	Geometria Intrínseca das superfícies	23
4.0.1	Exemplos de Aplicação do Corolário	23

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial consolidou-se como um ramo autônomo da matemática a partir do século XVIII, impulsionada pelo desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Inicialmente focada no estudo de propriedades locais de curvas e superfícies no espaço euclidiano por matemáticos como Leonhard Euler e Gaspard Monge, a disciplina passou por uma revolução conceitual em 1827 com Carl Friedrich Gauss. Ao demonstrar o seu célebre Theorema Egregium, Gauss introduziu a noção de geometria intrínseca, provando que a curvatura de uma superfície pode ser determinada puramente por medições feitas sobre ela, sem qualquer referência ao espaço tridimensional exterior. Essa mudança de paradigma pavimentou o caminho para que, posteriormente, Bernhard Riemann generalizasse esses conceitos para dimensões superiores, transformando a Geometria Diferencial na ferramenta matemática fundamental para a física moderna e para a compreensão da topologia global de variedades.

Dentro da própria matemática, a Geometria Diferencial conecta-se com diversas áreas, como: cálculo diferencial, equações diferenciais, sistemas dinâmicos, geometria global e topologia. Este projeto busca proporcionar ao estudante uma introdução sistemática à Geometria Diferencial de curvas e superfícies, destacando o estudo acerca de superfícies orientáveis e não orientáveis. Com o desenvolvimento do projeto, deve-se ficar claro a compreensão dos principais conceitos, definições e teoremas necessários para o entendimento do que é tratado.

2 DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo, discutimos alguns fundamentos importantes para a compreensão de superfícies orientáveis e não orientáveis.

2.1 CURVA PARAMETRIZADA DIFERENCIÁVEL

Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável α , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. A variável $t \in I$ é o **parâmetro** da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é o **traço** da curva.

O conceito de curva parametrizada diferenciável estabelece o alicerce cinemático e geométrico necessário para introduzir o movimento e a variação contínua sobre uma estrutura espacial. Sem a garantia de que a aplicação α seja de classe C^∞ ao longo de todo o intervalo aberto I , seria impossível assegurar a existência de derivadas de ordens superiores, inviabilizando o cálculo de vetores velocidade, aceleração e taxas de variação locais. Desse modo, a parametrização diferenciável surge como o requisito analítico primordial que nos permite mapear trajetórias suaves e, subsequentemente, delimitar conceitos geométricos fundamentais associados ao traço da curva, preparando o terreno para a introdução da própria regularidade.

Exemplo 1. A curva parametrizada $\alpha(x) = (x, |x|)$ não é diferenciável em $x = 0$. As implicações que surgem com o fato dessa curva não ser diferenciável em $x = 0$ mostram o porquê a aplicação diferenciável α deve ser de classe C^∞ . Sem a diferenciabilidade em todo o intervalo aberto I , há uma indeterminação no vetor velocidade e também há a perda da existência de uma única reta tangente na origem $x = 0$.

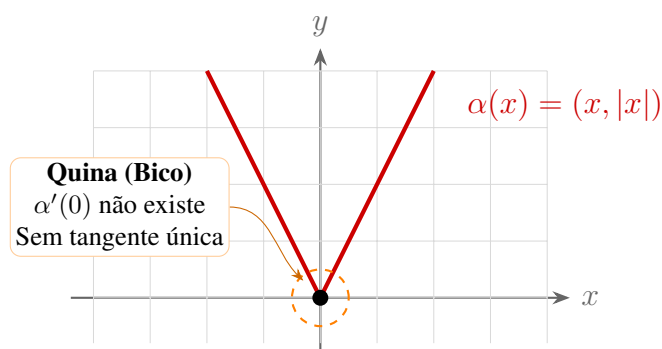


Figura 2.1: Gráfico da curva parametrizada $\alpha(x) = (x, |x|)$.

Fonte: Criada pelo autor

2.1.1 CURVA REGULAR

Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $\forall t \in I, |\alpha'(t)| = 1$.

A curva regular é a base unidimensional necessária para construir a superfície regular (que é o objeto tridimensional). Sem a garantia de que as curvas sobre a superfície se comportam de forma diferenciável e sem paradas ($\alpha' \neq 0$), seria impossível definir conceitos intrínsecos e extrínsecos fundamentais, como o próprio vetor normal $N(p)$ ou o Teorema Egregium.

2.1.2 MUDANÇA DE ORIENTAÇÃO EM CURVAS

Dada uma curva α parametrizada pelo comprimento de arco $s \in (a, b)$, podemos considerar a curva β definida em $(-b, -a)$ por $\beta(-s) = \alpha(s)$, que possui o mesmo traço que a primeira, percorrido porém em sentido contrário, esse processo se chama reparametrização. Diremos que estas duas curvas diferem por uma **mudança de orientação**.

2.2 SUPERFÍCIE REGULAR

Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $x : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. x é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

2. x é um homeomorfismo. Como x é contínua pela condição 1, isto significa que x tem inversa $x^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.

3. (condição de regularidade) Para todo $q \in U$, a diferencial $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

2.2.1 TEOREMA DA IMAGEM INVERSA

Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

2.3 PLANO TANGENTE

Seja $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2,

$$dx_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a S em $x(q)$.

Chamamos de plano tangente a S em p , o plano $dx_q(\mathbb{R}^2)$ que passa por $x(q) = p$ e que não depende da parametrização x . Tal plano será denotado por $T_p S$.

Antes de prosseguirmos com o conceito de orientação para objetos tridimensionais, como uma superfície regular, faz-se necessário a definição algébrica da orientação de um espaço vetorial.

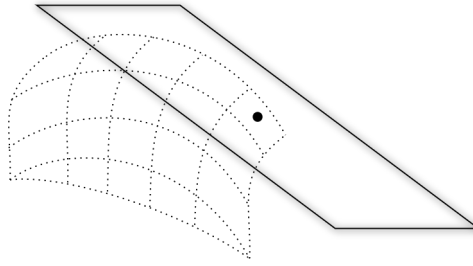


Figura 2.2: Plano Tangente

Fonte: Criado pelo autor

2.3.1 ORIENTAÇÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Duas bases ordenadas $e = \{e_i\}$ e $f = \{f_i\}$, $i = 1, \dots, n$, de um espaço vetorial V , n -dimensional, têm a mesma orientação se a matriz da mudança de base possui um determinante positivo. Denotamos esta relação por $\sim f$.

Essa definição algébrica é essencial para a Geometria Diferencial, pois, como aponta Do Carmo (2005), o plano tangente $T_p S$ em cada ponto p de uma superfície regular S constitui um espaço vetorial bidimensional. Dessa forma, o estudo da orientabilidade global da superfície dependerá diretamente da possibilidade de se correlacionar a orientação desses espaços vetoriais tangentes de maneira contínua e coerente ao longo de toda a estrutura geométrica.

2.3.2 VETOR TANGENTE

Entendemos por **vetor tangente** a S , em um ponto $p \in S$, o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$.

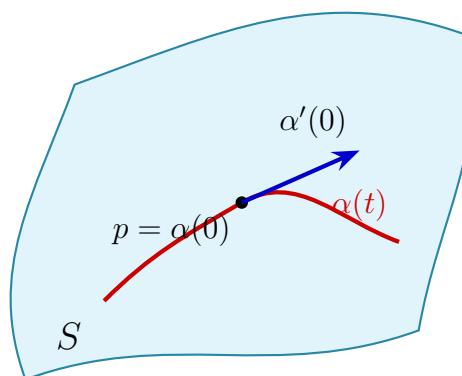


Figura 2.3: Representação geométrica de um vetor tangente $\alpha'(0)$ a uma superfície S no ponto p .

Fonte: Criada pelo autor

2.3.3 VETOR NORMAL UNITÁRIO LOCAL

Dado um sistema de coordenadas $x(u, v)$ em p , fica determinada a escolha de um vetor normal unitário N em p , a saber,

$$N(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}.$$

O formalismo local de superfícies estabelecido por Do Carmo (2005) na Seção 2.2 demonstra que a condição de regularidade é o que assegura a existência geométrica do plano tangente. Desse modo, o vetor normal unitário em cada ponto surge naturalmente a partir do produto vetorial das derivadas parciais associadas à parametrização.

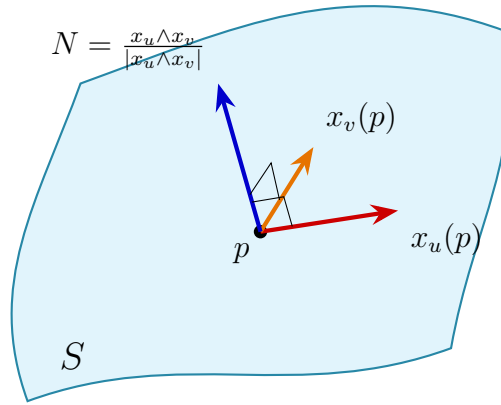


Figura 2.4: Representação geométrica do vetor normal unitário local N em relação aos vetores tangentes x_u e x_v no ponto p .

Fonte: Criada pelo autor

2.4 ORIENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES

Definição: Uma superfície regular S é orientável se for possível cobrir-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S , e S , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se S é orientada, uma parametrização (local) x é compatível com a orientação de S se, juntando x à família de parametrizações dada pela orientação, obtem-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S .

2.4.1 PROPOSIÇÃO 1

Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se e somente se existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S .

2.4.2 TEOREMA DE SAMELSON

Toda hipersuperfície de classe C^∞ e codimensão 1 que seja um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ é orientável.

Neste relatório, utilizaremos o fato obtido através do Teorema de Samelson que nos diz que: toda superfície regular compacta e sem fronteira imersa no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é obrigatoriamente orientável.

2.5 A APLICAÇÃO DE GAUSS

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de S .

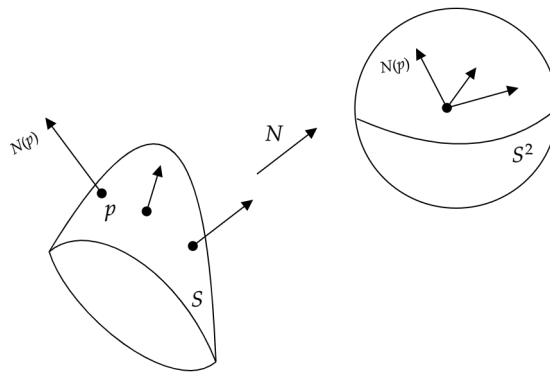


Figura 2.5: A Aplicação de Gauss

Fonte: Manfredo Perdigão do Carmo, 2005

2.5.1 CURVATURA

Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a curvatura média de S em p .

Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 , podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

em que:

k_1 (Curvatura Principal Máxima): É o valor máximo que a curvatura normal assume dentre todas as direções possíveis em p .

k_2 (Curvatura Principal Mínima): É o valor mínimo que a curvatura normal assume dentre todas as direções possíveis em p .

2.6 CARACTERÍSTICA EULER-POINCARÉ

Dada uma triangulação $\mathcal{T}$ de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície S , denotaremos por F o número de triângulos (faces), por E o número de lados (arestas), e por V o número de vértices da triangulação. O número

$$F - E + V = \chi \quad (2.1)$$

é chamado característica de Euler-Poincaré da triangulação.

Decorre dos teoremas de invariância topológica expostos por Do Carmo que o valor de χ independe da triangulação $\mathcal{T}$ em particular escolhida para codificar a região. Sendo assim, quando a região analisada compreende a totalidade de uma superfície compacta e orientável, o número χ passa a se configurar como um invariante intrínseco do próprio objeto geométrico, estendendo-se legitimamente como a *característica de Euler-Poincaré da superfície*, denotada por $\chi(S)$.

2.7 TEOREMA GAUSS-BONET GLOBAL

Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada e sejam $C_1, \dots, C_n$ as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂R de R . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas $C_1, \dots, C_n$. Então

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R),$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i , e a integral sobre C_i significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i .

2.7.1 COROLÁRIO A RESPEITO DO TEOREMA GAUSS-BONET GLOBAL

Seja S uma superfície compacta e orientável; então

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Onde K é a curvatura Gaussiana, $d\sigma$ é o elemento de área da superfície, e $\chi(S)$ é a Característica de Euler da superfície.

No plano, o corolário garante que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , pois:

Quando aplicamos o Teorema de Gauss-Bonnet local a uma região ligada por curvas geodésicas (um triângulo geodésico T na superfície), a fórmula assume a seguinte estrutura:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = \pi + \iint_T K d\sigma$$

Onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são os ângulos internos do triângulo e K é a curvatura Gaussiana.

Como a curvatura gaussiana K no plano é 0, resta apenas a relação geométrica pura:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = \pi + 0 \implies \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

Exemplo 1. Para a Esfera (S^2): A característica de Euler é $\chi(S^2) = 2$.

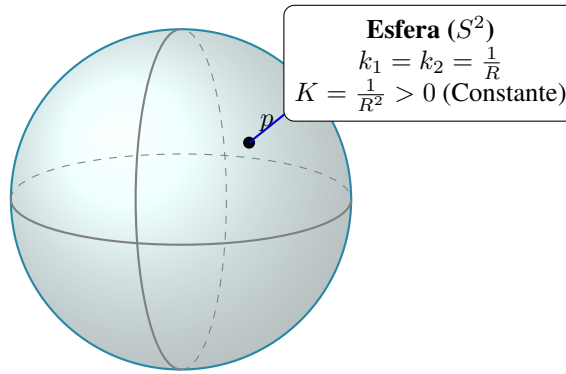


Figura 2.6: Distribuição uniforme de curvatura Gaussiana positiva em uma esfera regular.

Fonte: Criada pelo autor

Para calcularmos a curvatura da esfera, realizamos dois passos:

Passo A: Como vimos na definição do operador de forma, a curvatura Gaussiana é o produto das duas curvaturas principais ($K = k_1 k_2$). Em uma esfera perfeita de raio R , qualquer plano normal corta a superfície gerando uma circunferência máxima de raio R . A curvatura de uma circunferência de raio R é constante e vale $1/R$. Como todas as direções produzem a mesma curva, as curvaturas principais máxima e mínima são idênticas: $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$. Portanto, a curvatura Gaussiana em qualquer ponto da esfera é:

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2}$$

Passo B: A Integral de Superfície. A integral da curvatura total é dada por:

$$\iint_{S^2} K dA = \iint_{S^2} \frac{1}{R^2} dA$$

Como $1/R^2$ é uma constante, nós podemos retirá-la da integral:

$$\iint_{S^2} K dA = \frac{1}{R^2} \iint_{S^2} dA$$

A integral remanescente $\iint_{S^2} dA$ é, por definição, a área superficial total de uma esfera de raio R , cujo valor clássico é $4\pi R^2$. Substituindo esse valor, os raios se cancelam perfeitamente:

$$\iint_{S^2} K dA = \frac{1}{R^2} \cdot (4\pi R^2) = 4\pi$$

Isso comprova o resultado previsto pelo Teorema de Gauss-Bonnet, visto que $2\pi\chi(S^2) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$.

Exemplo 2. Para o Toro (T^2 - formato de rosca): O toro possui um "furo", logo sua característica de Euler é $\chi(T^2) = 0$.

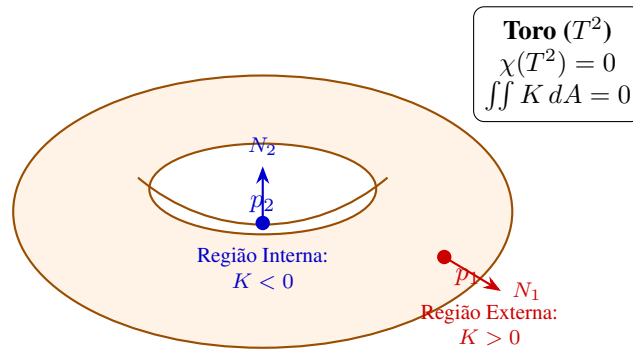


Figura 2.7: Regiões de curvatura positiva (externa) e negativa (interna) que se anulam na integração do Toro.

Font: Criada pelo autor

Para calcularmos a curvatura da esfera, realizamos três passos:

Passo A: Parametrização e Geometria do Toro! Um toro de revolução é gerado ao girar uma circunferência de raio r em torno de um eixo vertical a uma distância R (onde $R > r$). A sua parametrização clássica em coordenadas angulares $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ é dada por:

$$x(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

A partir das derivadas parciais e dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, deduz-se que as curvaturas principais em cada ponto do toro são: $k_1 = \frac{1}{r}$ (associada ao giro do próprio tubo pequeno). $k_2 = \frac{\cos u}{R + r \cos u}$ (associada ao giro em torno do eixo central). Multiplicando ambas, obtemos a Curvatura Gaussiana local do Toro:

$$K(u, v) = k_1 k_2 = \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)}$$

Interpretação Geométrica do Sinal: Quando $u \in (-\pi/2, \pi/2)$, temos $\cos u > 0$, logo $K > 0$ (a parte externa da rosca parece uma esfera). Quando $u \in (\pi/2, 3\pi/2)$, temos $\cos u < 0$, logo $K < 0$ (a parte interna, voltada para o buraco central, parece uma sela de cavalo).

Passo B: O Elemento de Área dA ! O elemento de área para essa parametrização é obtido pela norma do produto vetorial das derivadas parciais, $|x_u \wedge x_v|$, que resulta em:

$$dA = r(R + r \cos u) du dv$$

Passo C: O Cálculo da Integral! Agora montamos a integral dupla sobre todo o domínio do toro (u de 0 a 2π , e v de 0 a 2π):

$$\iint_{T^2} K dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos u}{r(R + r \cos u)} \right) \cdot (r(R + r \cos u) du dv)$$

Note a elegância algébrica: os termos no denominador se cancelam perfeitamente com os termos do elemento de área:

$$\iint_{T^2} K dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos u du dv$$

Podemos separar a integral dupla em um produto de duas integrais simples de uma variável:

$$\iint_{T^2} K dA = \left(\int_0^{2\pi} dv \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos u du \right)$$

Calculando cada uma: A primeira integral em relação a v é simples: $\int_0^{2\pi} dv = 2\pi$. A segunda integral em relação a u avalia o comportamento da curvatura ao longo do perfil do tubo:

$$\int_0^{2\pi} \cos u du = \left[\sin u \right]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

Substituindo os valores de volta no produto:

$$\iint_{T^2} K dA = 2\pi \cdot 0 = 0$$

Esse cálculo mostra de forma analítica que a área com curvatura positiva se anula perfeitamente com a área de curvatura negativa, resultando em uma curvatura total igual a zero, exatamente como dita a sua Característica de Euler ($\chi = 0$).

3 SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS E NÃO ORIENTÁVEIS

Lembremo-nos a definição de orientabilidade:

Definição 1.: Uma superfície regular S é orientável se for possível cobrir-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S , e S , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se S é orientada, uma parametrização (local) x é compatível com a orientação de S se, juntando x à família de parametrizações dada pela orientação, obtem-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S .

Proposição 1. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se e somente se existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S .

Fazendo uma conexão da **Proposição 1.** com o **Teorema da Imagem Inversa**, pode-se verificar que toda superfície obtida pelo teorema da imagem inversa é automaticamente orientável. Pela **Proposição 1**, se a superfície foi criada por $f(x, y, z) = a$, usando o fato de que a imagem inversa de valor regular é uma superfície, o cálculo diferencial nos garante que o vetor gradiente $\nabla f(p)$ é sempre **perpendicular (normal)** ao nível da superfície no ponto p .

Como o gradiente nunca é nulo na superfície (por definição de valor regular) e as derivadas parciais de f são contínuas, basta normalizarmos o gradiente para obter o campo global de vetores normais unitários:

$$N(p) = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$$

Como esse $N(p)$ está definido e é contínuo para **todos** os pontos da superfície ao mesmo tempo, fica demonstrado a existência do campo normal global. Portanto, a superfície é orientável.

3.1 EXEMPLOS

3.1.1 O TORO

Exemplo 1. O toro é obtido pela rotação de uma circunferência ao redor de um eixo que não a intersecta. Assim como a esfera, ele divide o espaço $\mathbb{R}^3$ em uma região interior (compacta) e uma exterior (não compacta). O campo de vetores normais pode ser escolhido apontando uniformemente para fora, o que garante sua orientabilidade.

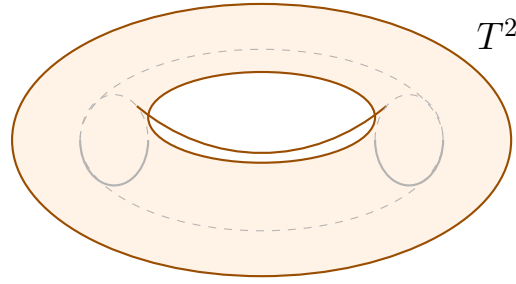


Figura 3.1: Representação geométrica tridimensional de um toro de revolução regular.

Fonte: Criada pelo autor

3.1.2 A ESFERA

Exemplo 2. A esfera é uma superfície orientável. Na esfera, a orientabilidade é visualmente clara. Podemos cobri-la com parametrizações clássicas (como parametrizações por parametrizações locais geográficas/coordenadas esféricas). Em cada ponto, o vetor normal unitário pode ser escolhido apontando para fora da esfera. Essa escolha é globalmente contínua.

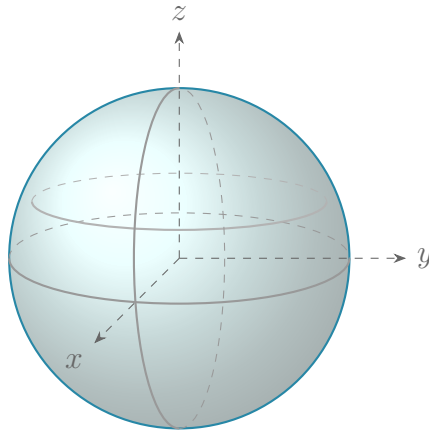


Figura 3.2: Representação geométrica tridimensional da esfera unitária no espaço euclidiano.

Fonte: Criada pelo autor

3.1.3 A FAIXA DE MÖBIUS

Exemplo 3. Falando agora de uma superfície não-orientável, citaremos a **Faixa de Möbius**. A formulação matemática padrão mapeia duas variáveis, u e v , onde: $u \in [0, 2\pi]$ representa o ângulo de rotação ao redor do centro da faixa (a volta completa) e $v \in [-w/2, w/2]$ (ou simplesmente $[-1, 1]$ escalonando a largura) representa a posição ao longo da largura da fita. As equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \left(R + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) \cos(u) \\ y(u, v) &= \left(R + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) \sin(u) \end{aligned}$$

$$z(u, v) = v \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

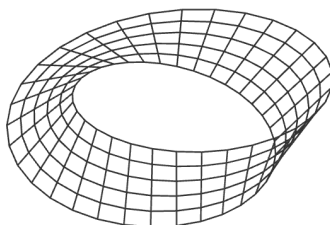


Figura 3.3: Faixa de Möbius

Fonte: Criada pelo autor

Ela é uma superfície regrada. Tomamos um círculo no plano xy e, em cada ponto desse círculo, visualizamos um segmento de reta perpendicular a ele. À medida que giramos ao longo do círculo (completando uma volta de 2π), esse segmento de reta gira sobre o seu próprio centro em um ângulo de exatamente π (meia volta). Para mostrarmos que ela é uma superfície não-orientável, escolhamos um ponto inicial p na faixa e fixamos um vetor normal unitário $N(p)$ apontando para um dos lados da faixa, podemos "caminhar" com esse vetor continuamente ao longo da linha média da faixa. Ao completarmos uma volta inteira e retornarmos ao mesmo ponto de partida p , a torção de π sofrida pela faixa força o vetor a apontar para a direção oposta ($-N(p)$). Essa contradição visual é traduzida no livro por meio da análise das parametrizações. Se tentarmos criar uma cobertura de mapas locais para a Faixa de Möbius, haverá pelo menos uma região de sobreposição onde o determinante do Jacobiano da mudança de parâmetros será negativo. Portanto, a Faixa de Möbius serve como o divisor de águas, pois prova que a propriedade de ter "dois lados" não é uma trivialidade do espaço tridimensional, mas sim uma restrição topológica e diferencial severa que exige uma definição rigorosa — seja pela preservação do sinal dos determinantes nas mudanças de coordenadas (visão intrínseca), seja pela existência de um campo de vetores normais global e contínuo (visão extrínseca).

3.2 A FAIXA DE MÖBIUS E A CONEXÃO COM O TEOREMA DE SAMELSON

Após a análise da Faixa de Möbius, constata-se que a perda de orientabilidade está intimamente ligada à geometria global do objeto. Surge então uma questão central: seria possível obter uma superfície que fosse simultaneamente compacta (fechada, limitada e sem bordo) e não orientável no espaço euclidiano? A resposta a essa provocação é dada pelo Teorema de Samelson, citado anteriormente. No contexto tridimensional deste relatório, o resultado assegura que qualquer superfície regular compacta e sem bordo contida no $\mathbb{R}^3$ (como a esfera ou o toro) herda compulsoriamente uma orientação. Como consequência direta desse teorema, objetos

compactos clássicos que carecem de orientação, a exemplo da Garrafa de Klein e do Plano Projetivo, não admitem um mergulho regular no $\mathbb{R}^3$. Para que tais estruturas sejam representadas em nosso espaço tridimensional, faz-se inevitável a presença de autointerseções, o que viola localmente a condição de regularidade ($\frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \neq 0$) discutida nas seções anteriores. Assim, o Teorema de Samelson consolida a profunda interação entre as restrições topológicas de uma superfície e as propriedades geométricas do espaço ambiente.

3.3 A GARRAFA DE KLEIN

No rigor matemático, superfícies como a Garrafa de Klein são frequentemente apresentados por diagramas de identificação (regiões poligonais onde as arestas são coladas). Para falarmos a respeito da Garrafa de Klein, precisamos antes apresentar sua construção. Para construirmos essa superfície, pegamos um quadrado. Colamos a aresta superior com a inferior no mesmo sentido (formando um cilindro). Porém, ao colar a extremidade direita com a esquerda, invertemos o sentido das setas (uma torção). É essa inversão na colagem que destrói a orientabilidade. Quando vemos uma representação física ou em vidro de uma Garrafa de Klein, notamos que o pescoço da garrafa atravessa a si mesmo (uma autointerseção). Vale ressaltar que essa autointerseção não é um defeito do modelo físico, mas uma exigência topológica do nosso espaço. Como vimos pelo Teorema de Samelson, toda superfície compacta e sem bordo perfeitamente mergulhada (sem se cortar) no $\mathbb{R}^3$ é obrigatoriamente orientável. Como a Garrafa de Klein é compacta, sem bordo e não orientável, o Teorema de Samelson prova que é impossível construir uma Garrafa de Klein perfeita no $\mathbb{R}^3$. Para existir no nosso espaço tridimensional, ela é forçada a se intersectar. Uma Garrafa de Klein perfeita, sem se cortar, só consegue ser construída livremente se dispusermos de um espaço com pelo menos quatro dimensões ($\mathbb{R}^4$), onde o tubo conseguiria dar a volta e se colar sem tocar na própria parede.

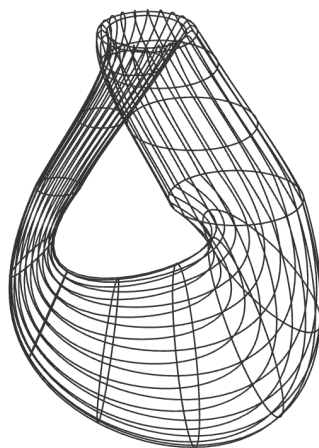


Figura 3.4: A Garrafa de Klein

Fonte: Criada pelo autor

4 GEOMETRIA INTRÍNSECA DAS SUPERFÍCIES

A geometria intrínseca de uma superfície compreende o estudo de todas as propriedades e grandezas geométricas que podem ser determinadas e medidas sem qualquer referência ao espaço tridimensional ambiente $\mathbb{R}^3$ no qual a superfície se encontra imersa. Fundamentada exclusivamente na primeira forma fundamental, essa abordagem engloba conceitos operados puramente de forma interna, como o comprimento de curvas, geodésicas, ângulos e, por força do *Theorema Egregium* de Gauss, a própria curvatura Gaussiana K .

O ápice do entendimento dessa geometria se consolida na relação existente entre essas medições locais intrínsecas e a estrutura macroscópica global da superfície. O Teorema de Gauss-Bonnet coroa essa interação de maneira surpreendente ao unificar o cálculo geométrico local e a topologia. Para o escopo deste trabalho, o interesse central repousa sobre o desdobramento direto desse resultado para superfícies fechadas, formalizado pelo Corolário do Teorema de Gauss-Bonnet Global:

$$\iint_S K \, d\sigma = 2\pi\chi(S) \quad (4.1)$$

Este corolário dita que a integral da curvatura Gaussiana ao longo de toda uma superfície compacta e orientável S está rigidamente amarrada à sua assinatura topológica, dada pela característica de Euler-Poincaré $\chi(S)$. A partir desse enunciado, torna-se possível compreender como deformações geométricas locais preservam, de maneira invariante, uma constante global determinada intrinsecamente pelo número de furos do objeto estudado.

4.0.1 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO COROLÁRIO

Para compreender a força do Corolário de Gauss-Bonnet Global, vamos analisar duas superfícies clássicas com topologias completamente distintas: a esfera e o toro.

Exemplo 1: A Esfera (S^2)

Imagine uma esfera perfeita de raio R . Vamos calcular os dois lados da equação de Gauss-Bonnet independentemente para verificar o teorema:

1. **O Lado Geométrico (Esquerda):** A curvatura Gaussiana de uma esfera é constante e positiva em todos os pontos, valendo $K = \frac{1}{R^2}$. Como a área total de uma esfera é dada por $4\pi R^2$, a integral da curvatura sobre a superfície resulta em:

$$\iint_{S^2} K \, d\sigma = \iint_{S^2} \frac{1}{R^2} \, d\sigma = \frac{1}{R^2} \iint_{S^2} d\sigma = \frac{1}{R^2} (4\pi R^2) = 4\pi \quad (4.2)$$

2. **O Lado Topológico (Direita):** Se fizermos uma triangulação simples na superfície de uma esfera (por exemplo, pensando nela como um poliedro inflado), a contagem de faces,

arestas e vértices sempre resultará na característica de Euler $\chi(S^2) = 2$. Multiplicando pelo fator do corolário, temos:

$$2\pi\chi(S^2) = 2\pi(2) = 4\pi \quad (4.3)$$

Ambos os lados fornecem exatamente 4π . Note que se você amassar a esfera (como uma bola de tênis murcha), os valores locais de K vão mudar em cada ponto, mas o resultado final da integral continuará sendo rigidamente 4π .

Exemplo 2: O Toro (T^2)

Agora, imagine o toro (a superfície de uma rosca ou boia de piscina):

1. **O Lado Geométrico (Esquerda):** O toro possui regiões com curvaturas de sinais opostos. A parte externa é abaulada para fora (curvatura positiva, $K > 0$) e a parte de dentro, voltada para o buraco, tem o formato de uma sela de cavalo (curvatura negativa, $K < 0$). Ao integrarmos K sobre todo o toro, a parte positiva e a parte negativa se cancelam perfeitamente, resultando em:

$$\iint_{T^2} K d\sigma = 0 \quad (4.4)$$

2. **O Lado Topológico (Direita):** Topologicamente, se desenharmos uma malha de triângulos para cobrir o toro, a contagem de Euler sempre se anula por conta do seu "furo", fornecendo $\chi(T^2) = 0$. Substituindo no corolário:

$$2\pi\chi(T^2) = 2\pi(0) = 0 \quad (4.5)$$

O balanço final da curvatura é zero, casando perfeitamente com a topologia de um objeto que possui exatamente um furo.

REFERÊNCIAS

- [1] TENENBLAT, Ketí. **Introdução à geometria diferencial**. 2. ed. rev. São Paulo: Blucher, 2008.
- [2] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Tradução de Pedro Roitman. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2005. (Coleção Textos Universitários).
- [3] SAMELSON, H. Orientability of Hypersurfaces in R^n . **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 22, n. 1, p. 301-302, jul. 1969.