

Notas em Teoria de Probabilidade e Processos Estocásticos

Miguel Cordeiro Tarcisio

21 de junho de 2026

Resumo

As notas em Teoria de Probabilidade e Processos Estocásticos apresentam um resumo dos conceitos estudados entre março e junho de 2026 no âmbito do Projeto Irêre. Os tópicos aqui presentes se baseiam no livro *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos* [1] e *Probability and Stochastic Processes* [2].

Sumário

1	Teoria da Probabilidade	2
1.1	Experiência	2
1.2	Espaço Amostral	2
1.3	Ponto Amostral	2
2	Álgebra de Eventos	3
2.0.1	Leis de Morgan	4
2.1	Álgebra	5
2.2	σ -Álgebra	5
3	Eventos	6
4	Medida de Probabilidade	6
4.1	Probabilidade como Frequência Relativa	6
4.2	Definição Axiomática de Probabilidade	6
4.3	Propriedades da Medida de Probabilidade	7
5	Probabilidade Condicional	7
5.1	Teorema da Probabilidade total	7
5.2	Regra de Bayes	8
5.3	Independência de Eventos	8
6	Lista 1	9
7	Variáveis Aleatórias	19
7.1	Função de Distribuição de Probabilidade	19
7.2	Propriedades da Função de Distribuição de Probabilidade	20
8	Classificação de Variáveis Aleatórias	20

9	Função Densidade de Probabilidade	20
10	Exemplos de Funções de densidade	21
10.1	Normal ou Gaussiana	21
10.2	Uniforme	21
10.3	Exponencial	21
10.4	Poisson	22
10.5	Binomial	22
11	Lista 2	22
12	Processos Estocásticos	27
12.1	Representação de Processos Estocásticos	27
12.2	Classificação	27
13	Lista 3	28
14	Cadeias de Markov	32
14.1	Classificação das Cadeias de Markov	32
14.1.1	Cadeia de Markov Homogênea	32
14.1.2	Cadeia de Markov Recorrente	32
14.1.3	Tempo Médio de Recorrência	32
14.1.4	Comunicação	33
14.1.5	Estados	33
15	Lista 4	33
16	Bibliografia	38

1 Teoria da Probabilidade

1.1 Experiência

Definição 1. Experiência é qualquer evento que possa ser repetido quantas vezes forem necessárias em condições idênticas. Como, por exemplo, jogar dados ou a quantidade de peças defeituosas em um lote. Junto de uma definição de experiência se deve incluir explicitamente todos os resultados que podem ser obtidos.

1.2 Espaço Amostral

Definição 2. O espaço amostral é o conjunto com todos os resultados possíveis da experiência definida anteriormente. Utilizamos a notação Ω para nos referir ao espaço amostral.

1.3 Ponto Amostral

Definição 3. O ponto amostral é um elemento de Ω . Utilizamos w para nos referir a um ponto amostral qualquer.

Exemplo 1. Considere a experiência de abrir um livro qualquer com mais de 50 páginas e observar a primeira letra impressa na página de número 50.

Seja a letra observada o resultado da experiência.

Se o livro for escrito em português e não for feita a distinção entre maiúsculas e minúsculas, então o espaço amostral será

$$\Omega = \{a, b, \dots, y, z\}$$

e podemos nomear seus elementos como

$$w_1 = a, w_2 = b, \dots, w_{25} = y, w_{26} = z.$$

2 Álgebra de Eventos

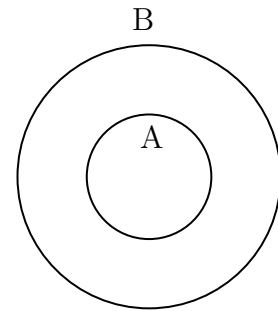
Note que a modelagem da teoria de probabilidade decorre diretamente da noção de conjuntos. Com isso, vamos definir a álgebra de conjuntos para podermos prosseguir o estudo de probabilidade.

Preâmbulo 1. Sejam A , B e C conjuntos. Valem as seguintes propriedades e operações:

- **Igualdade** Se A e B são iguais, então $A = B$.

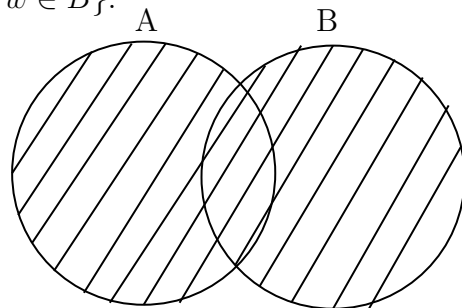
- **Inclusão**

Se A está contido em B , então $A \subset B$.



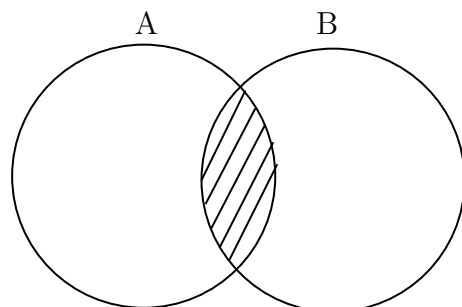
- **União**

Se A união B , então $A \cup B = \{w \in \Omega \mid w \in A \text{ ou } w \in B\}$.



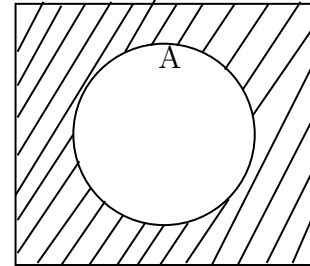
- **Interseção**

Se A interseção B , então $A \cap B = \{w \in \Omega \mid w \in A \text{ e } w \in B\}$.



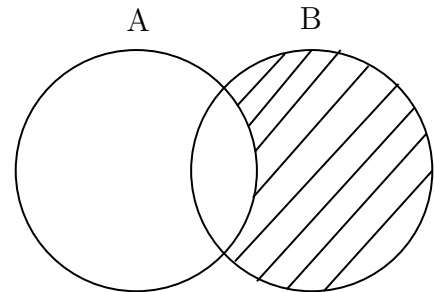
- **Complemento**

O complemento de A é $\bar{A} = \{w \in \Omega \mid w \notin A\}$.



- **Diferença**

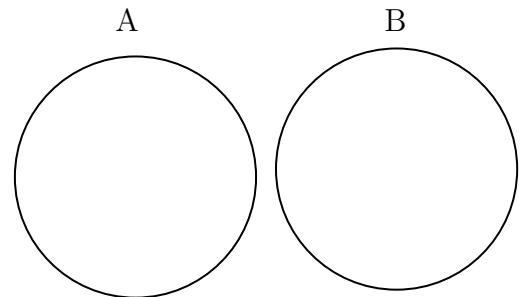
B menos A é $B - A = \{w \in \Omega \mid w \in B \text{ e } w \notin A\}$.



- **Vazio:** O conjunto vazio é o conjunto sem elementos e sua notação é $\emptyset$.

- **Disjunção**

A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.



- **Associatividade:** As operações de União e Interseção de conjuntos possuem a propriedade associativa, isto é

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad \text{e} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

- **Distributiva:** A operação de interseção detém a propriedade distributiva em relação a união

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2.0.1 Leis de Morgan

Dados dois conjuntos A, B , as leis de Morgan são

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$,
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2.1 Álgebra

2.1 Álgebra

Definição 4. Uma classe, também chamada de família ou coleção, é uma coleção de conjuntos.

Definição 5. Uma classe é dita ser uma álgebra se satisfaz as seguintes condições

- (i) $A \in \mathcal{A} \rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.
- (ii) $A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{A} \rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$.

Diz-se então que a classe $\mathcal{A}$ é fechada relativamente às operações de complementação e união.

Propriedade 1. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra, então:

- (i) $A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{A} \rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{A}$.
- (ii) $A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{A} \rightarrow (B - A) \in \mathcal{A}$.
- (iii) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (iv) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (v) $A_i \in \mathcal{A}; i = 1, 2, \dots, n \rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Definição 6. Se a propriedade (v) vale para um número infinito, desde que seja enumerável, então chamamos essa álgebra de σ -álgebra.

2.2 σ -Álgebra

A menor σ -álgebra que contém todos os conjuntos de uma classe C é representada por $\mathcal{A}(C)$ e a denominamos σ -álgebra gerada por C .

Exemplo 2. Considere a experiência que consiste em lançar um dado cujo resultado é o número da face observada. Seja o ponto-amostra associado à face i , ($i = 1, 2, \dots, 6$) denotado por f_i , tem-se o seguinte espaço amostral

$$\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}.$$

Considere a classe $\mathcal{C}$ abaixo,

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{f_1, f_3, f_5\}, \{f_2, f_4, f_6\}, \{f_1\}\}.$$

Note que essa classe não constitui uma álgebra, pois, não satisfaz a definição. Com efeito, a união

$$\{f_1\} \cup \{f_2, f_4, f_6\} = \{f_1, f_2, f_4, f_6\},$$

não pertence a $\mathcal{C}$. Para que fosse álgebra, este conjunto deveria pertencer à classe. Da mesma forma, o complemento de $\{f_1\}$, caracterizado por

$$\{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\},$$

também deveria pertencer à classe.

Finalmente, incluindo ainda $\{f_3, f_5\}$, que é o complemento de

$$\{f_1, f_2, f_4, f_6\},$$

é possível verificar que

$$\{\emptyset, \Omega, \{f_1\}, \{f_1, f_3, f_5\}, \{f_1, f_2, f_4, f_6\}, \{f_2, f_4, f_6\}, \{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}, \{f_3, f_5\}\},$$

é fechada em relação à complementação e à união, sendo portanto uma álgebra.

Esta coleção também é a menor σ -álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ definida por $\mathcal{C}$, porque nenhum dos três conjuntos acrescentados à classe poderia ser retirado sem violar a definição de álgebra. Note que a coleção tem um número finito de conjuntos (portanto enumerável) e é álgebra, logo é σ -álgebra. ■

3 Eventos

Definição 7. Chamamos de Evento qualquer subconjunto de Ω que pertença à σ -álgebra.

Exemplo 3. Tome o Exemplo 2. Pela definição de evento, então todos os conjuntos pertencentes à σ -álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ são eventos.

Definição 8. Dois eventos são ditos mutuamente exclusivos quando correspondem a dois subconjuntos de Ω que são disjuntos.

Exemplo 4. Ainda no Exemplo 2, pela definição de eventos mutuamente exclusivos, temos que os eventos $\{f_1\}$ e $\{f_2, f_4, f_6\}$ são mutuamente exclusivos pois são disjuntos.

4 Medida de Probabilidade

4.1 Probabilidade como Frequência Relativa

Assuma que um fenômeno foi observado N vezes. Destas N vezes, anota-se o número de vezes que o evento A tenha ocorrido. Seja $n(A)$ este número. A razão

$$\frac{n(A)}{N}$$

é denominada frequência relativa da ocorrência de A para N observações. Abaixo seguem algumas propriedades da frequência relativa.

- (i) $\frac{n(A)}{N} \in [0, 1]$.
- (ii) $\frac{n(\Omega)}{N} = 1$.
- (iii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) \rightarrow \frac{n(A \cup B)}{N} = \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N}$.

4.2 Definição Axiomática de Probabilidade

Dado um espaço amostral Ω e uma álgebra de eventos $\mathcal{A}$, a probabilidade é uma medida sobre o espaço $\mathcal{A}$ tal que, dados quaisquer elementos $A, B \in \mathcal{A}$,

- (i) $P(A) \geq 0$.
- (ii) $P(\Omega) = 1$.
- (iii) Se $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- (iv) Se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i, j = 1, 2, \dots$ com $i \neq j$, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

4.3 Propriedades da Medida de Probabilidade

A medida de probabilidade possui as seguintes propriedades:

- **Aditividade:** Para $A_i \cap A_j = \emptyset$ e $i, j = 1, 2, \dots, n$ ($i \neq j$), temos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

- **Complemento:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- **Evento Vazio:** $P(\emptyset) = 0$.
- **Limitante Superior de $P(A)$:** $P(A) \leq 1$.
- **União:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5 Probabilidade Condicional

A probabilidade condicional de B dado A é obtida pela expressão:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

A probabilidade condicional apresenta as seguintes propriedades:

- Se A e B são mutuamente exclusivos, $P(B|A) = 0$.
- Se $A \subset B \rightarrow A \cap B = A \rightarrow P(B|A) = 1$.
- Segue também que $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \geq P(B)$.

5.1 Teorema da Probabilidade total

Primeiro, vamos definir uma partição.

Definição 9. Uma partição do Espaço de Amostras é uma coleção de eventos $\{B_i\}$ tal que $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i, j = 1, 2, \dots, m$ ($i \neq j$), e

$$\bigcup_{j=1}^m B_j = \Omega.$$

Teorema 1 (Teorema da Probabilidade Total). Dado um evento A e uma partição do espaço amostral $\{B_i\}$, então

$$P(A) = \sum_{j=1}^m P(A \cap B_j),$$

ou, de forma equivalente, aplicando a definição de probabilidade condicional,

$$P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j)P(B_j).$$

5.2 Regra de Bayes

Seja $\{B_j\}$ uma partição do espaço amostral Ω e $P(B_j) > 0$ para todo j e seja A um evento com $P(A) > 0$. Pela definição de probabilidade condicional, temos

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)}, \quad \text{e} \quad P(A|B_j) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(B_j)}.$$

Portanto

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)}.$$

Pelo teorema da probabilidade total, temos que

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{k=1}^m P(A|B_k)P(B_k)}.$$

Esse resultado é conhecido como a regra de Bayes, e nada mais é que uma forma de calcular a probabilidade condicional por meio de partições dos espaços amostrais.

5.3 Independência de Eventos

Definição 10. Dois eventos A, B são ditos independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ao aplicar a definição de independência na definição de probabilidade condicional e supondo $P(A), P(B), P(A \cap B) > 0$, segue que

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A)P(B)}{P(A)} \\ &= P(B). \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos que

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P(B)}{P(B)} \\ &= P(A). \end{aligned}$$

Note que se os eventos são independentes e mutuamente exclusivos, então $P(B|A) = 0 \neq P(B)$. Generalizando

$$P\left(\bigcap_{i=1}^j A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^j P(A_{K_i}).$$

6 Lista 1

- 1) Uma moeda é lançada. Existem dois resultados possíveis, cara (denotada por C) e coroa (denotada por K), de modo que $\Omega = C, K$. Qual a probabilidade de que:

a) o resultado é cara?

Em Ω existem apenas 2 resultados possíveis, cara ou coroa. Probabilidade é calculada contando os resultados favoráveis e dividindo pelo total de casos possíveis. Temos 1 caso favorável e 2 casos possíveis. Portanto, a chance do resultado ser cara é de $P(C) = \frac{1}{2}$.

b) O resultado não é cara.

Temos que $P(C)$ é a chance do resultado ser cara, logo $P(\overline{C})$ é a chance de todos os resultados que não são cara. Pela probabilidade do complemento, temos que

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C).$$

Por a), sabemos que $P(C) = \frac{1}{2}$.

$$P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{2},$$

$$P(\overline{C}) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $P(\overline{C}) = \frac{1}{2}$ é a probabilidade do resultado não ser cara.

- 2) Uma moeda, possivelmente viciada (isto é, $P(C) = p, P(K) = 1 - p$), é lançada uma vez.

a) Construa o espaço amostral

Uma moeda tem apenas 2 faces, então seu espaço amostral é $\Omega = \{C, K\}$.

b) Construa a álgebra de eventos

Seja a classe $\mathcal{C} = \{\emptyset; \Omega; \{C\}; \{K\}\}$.

Uma classe deve satisfazer duas condições para ser uma álgebra de eventos

$$I) A \in \mathcal{A} \rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A} \text{ (fechada para complementação).}$$

$$II) A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{A} \rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A} \text{ (fechada para união).}$$

Seja $A = \{C\}$, relativo ao espaço amostral Ω , seu complementar $\overline{A} = \{K\}$ pertence a $\mathcal{C}$ e $\Omega = \{C\} \cup \{K\}$ pertence a $\mathcal{C}$. Assim $\mathcal{C}$ é uma álgebra de eventos e por conter um número finito de elementos também é uma σ -álgebra.

c) Qual a probabilidade de obter exatamente uma cara em três lançamentos?

Seja $L_n = \{\text{O número } n \text{ de lançamentos onde se obtém apenas uma cara}\}$.

Vamos calcular $P(L_3)$.

Sabemos que $P(C) = p$ e $P(K) = 1 - p$.

Existem 3 formas de se obter exatamente uma cara em 3 lançamentos

$$\{\{C, K, K\}; \{K, C, K\}; \{K, K, C\}\}.$$

Todos os lançamentos são independentes, então multiplicamos as chances

$$P(C) * P(K) * P(K) = p(1 - p)^2,$$

e existem 3 formas de obter o mesmo resultado, então soma-se as probabilidades

$$P(L_3) = 3p(1 - p)^2.$$

3) Probabilidade é calculada contando os resultados favoráveis e dividindo pelos casos totais.

Passo 1: Contando casos totais

A questão pergunta sobre os casos onde colocamos as xícaras nos pires, então os pires serão fixos.

Existem 6 formas de dispor as xícaras sobre os pires. Então temos o espaço amostral

$$\Omega = \{\{vv, bb, pp\}; \{vv, pb, bp\}; \{bv, pb, vp\}; \{pv, bb, vp\}; \{pv, vb, bp\}; \{bv, vb, pp\}\}.$$

Tome um conjunto da classe Ω , digamos $\{vv, bb, pp\}$. Nesse conjunto pertencem os elementos vv, bb e pp. A primeira letra de cada elemento representa a cor da xícara e a segunda letra representa a cor do pires.

Passo 2: Contando casos favoráveis

De todos os conjuntos listados apenas 2 são desarranjos $\{bv, pb, vp\}$ e $\{pv, vb, bp\}$.

Passo 3: Calculando probabilidade

Probabilidade é calculada contando os resultados favoráveis e dividindo pelos casos totais.

Seja $X_n = \{\text{O número } n \text{ de xícaras sobre pires de mesma cor}\}$

$$P(X_0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Portando ao dispor as xícaras sobre os pires de forma aleatória a chance de que nenhum par tenha as mesmas cores é de $\frac{1}{3}$.

4) Uma família tem dois filhos.

a) Qual é a probabilidade de ambos serem meninos, dado que pelo menos um é menino?

Sejam

$$M_1 = \{\text{Ao menos um é menino}\} \text{ e } M_2 = \{\text{Os dois são meninos}\}.$$

Temos o espaço amostral

$$\Omega = \{MM; MF; FM; FF\},$$

de possibilidades para o sexo de dois filhos, onde a primeira letra representa o mais velho e a segunda o mais novo.

A probabilidade de ambos serem meninos dado que um é menino se dá por

$$P(M_2|M_1) = \frac{P(M_2 \cap M_1)}{P(M_1)}$$
$$P(M_2 \cap M_1) = \frac{1}{4}.$$

Pois existe apenas 1 caso onde ao menos um é menino ao mesmo tempo que os dois são meninos.

$$P(M_1) = \frac{3}{4}.$$

Porque 3 casos tem ao menos 1 menino.

Substituindo os valores,

$$\begin{aligned} P(M_2|M_1) &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a chance de ambos serem meninos dado que ao menos um é menino é $P(M_2|M_1) = \frac{1}{3}$.

b) Qual é a probabilidade de ambos serem meninos, dado que o mais novo é menino?

Sejam

$$M_n = \{\text{O mais novo é menino}\} \text{ e } M_2 = \{\text{Os dois são meninos}\}.$$

A probabilidade de ambos serem meninos dado que o mais novo é menino pode ser expresso como

$$P(M_2|M_n) = \frac{P(M_2 \cap M_n)}{P(M_n)}.$$

Vamos calcular cada componente, começando pela chance do mais novo ser menino.

$$P(M_n) = \frac{2}{4}.$$

Porque em Ω existem 2 possibilidades do mais novo ser menino.

Calculando a interseção

$$P(M_2 \cap M_n) = \frac{1}{4}.$$

Pois temos um caso o mais novo é menino e os dois são meninos.

Substituindo,

$$P(M_2|M_n) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a chance de ambos serem meninos dado que o mais novo é menino é $P(M_2|M_n) = \frac{1}{2}$.

- 5) Um homem possui cinco moedas, duas das quais têm duas caras, uma tem duas coroas e duas são normais. Ele fecha os olhos, escolhe uma moeda aleatoriamente e a lança.

Existem 5 moedas tal que duas tem duas caras, uma tem duas coroas e duas são normais.

$$M = \{CC, CC, KK, CK, CK\}.$$

Onde a primeira letra de cada elemento representa a face superior e a segunda a face inferior

Seja

$$C_s = \{\text{A face superior é cara}\} \text{ e } C_i = \{\text{A face inferior é cara}\}.$$

- a) Qual é a probabilidade de a face inferior da moeda ser cara?

Precisamos calcular $P(C_i)$

Pela partição de espaços de probabilidade temos que

$$P(C_i) = P(CC) \cdot P(C_i|CC) + P(CC) \cdot P(C_i|CC) + P(KK) \cdot P(C_i|KK) + \\ P(CK) \cdot P(C_i|CK) + P(CK) \cdot P(C_i|CK).$$

Portanto, a chance de se obter cara na face inferior é

$$P(C_i) = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ = \frac{3}{5}.$$

b) Ele abre os olhos e vê que a moeda está mostrando cara; qual é a probabilidade de a face inferior ser cara?

Essa pergunta pode ser escrita da seguinte forma

$$P(C_i|C_s) = \frac{P(C_i \cap C_s)}{P(C_s)}.$$

Calculando interseção

$$P(C_i \cap C_s) = \{\text{A moeda é duas caras}\} \\ = P(CC) + P(CC) \\ = \frac{2}{5},$$

pois, só existem dois casos onde ambas as faces são cara. Calculando o denominador

$$P(C_s) = P(CC) \cdot P(C_s|CC) + P(CC) \cdot P(C_s|CC) + P(KK) \cdot P(C_s|KK) + \\ P(CK) \cdot P(C_s|CK) + P(CK) \cdot P(C_s|CK) = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ = \frac{3}{5},$$

pois, existe quatro casos onde a face superior é cara.

Calculando probabilidade condicional

$$P(C_i|C_s) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} \\ P(C_i|C_s) = \frac{2}{3}$$

Dessa forma, a chance da face inferior ser cara dado que a face superior é cara é $P(C_i|C_s) = \frac{2}{3}$.

- 6) Uma doença rara afeta uma pessoa em cada 10^5 . Um teste para a doença apresenta resultado positivo com probabilidade $\frac{99}{100}$ quando aplicado a uma pessoa doente e com probabilidade $\frac{1}{100}$ quando aplicado a uma pessoa saudável. Qual é a probabilidade de você ter a doença, dado que o teste apresentou resultado positivo?

Seja

$$D = \{\text{Pessoas doentes}\}, S = \{\text{Pessoas saudáveis}\}, Pos = \{\text{O teste resultou em positivo}\}.$$

Dados da questão:

$$P(Pos|D) = \frac{99}{100}, P(Pos|S) = \frac{1}{100}, P(D) = \frac{1}{10^5}, P(S) = 1 - \frac{1}{10^5}.$$

A pergunta pode ser escrita como

$$P(D|Pos) = \frac{P(D \cap Pos)}{P(Pos)}.$$

Calculando probabilidade do teste resultar em positivo. O espaço de resultados positivos pode ser dividido em testes positivos e pessoa saudável ou testes positivos e pessoas doentes

Então

$$\begin{aligned} Pos &= (Pos \cap D) \cup (Pos \cap S), \\ P(Pos) &= P(Pos|D)P(D) + P(Pos|S)P(S). \end{aligned}$$

Substituindo valores,

$$\begin{aligned} P(Pos) &= P(Pos|D)P(D) + P(Pos|S)P(S) \\ &= \frac{99}{100} \frac{1}{10^5} + \frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{10^5}\right) \\ &= 0,0100098. \end{aligned}$$

Calculando o numerador,

$$\begin{aligned} P(D \cap Pos) &= P(Pos|D)P(D) \\ &= \frac{99}{100} \frac{1}{10^5} \\ &= 0,0000099. \end{aligned}$$

Calculando a probabilidade,

$$\begin{aligned} P(D|Pos) &= \frac{P(D \cap Pos)}{P(Pos)} \\ &= \frac{0,0000099}{0,0100098} \\ &= 0,000989031. \end{aligned}$$

7) 13 cartas são retiradas de um baralho normal de 52 cartas.

a) Calcule a probabilidade de uma mão conter exatamente dois reis e um ás.

Probabilidade é calculada contando os casos favoráveis e dividindo pelos casos totais.

Passo 1: Casos totais:

O baralho tem 52 cartas que estarão distribuídas em 13 espaços da mão, então

$$C_{52,13} = \frac{52!}{13!39!}.$$

Esse é o número de casos totais.

Passo 2: Casos favoráveis:

Existem quatro ases e quatro reis no baralho. Os ases ocuparão exatamente um espaço e os reis ocuparão dois espaços, sobrando dez espaços para as demais cartas.

Formas de distribuir os ases:

$$C_{4,1} = \frac{4!}{1!2!}.$$

Formas de distribuir os reis:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!1!}.$$

Formas de contar o restante das cartas:

$$C_{44,10} = \frac{44!}{10!34!}$$

Que nos dá um total de

$$C_{4,1} * C_{4,2} * C_{44,10}.$$

Passo 3: Calculando a probabilidade:

$$\begin{aligned} P &= \frac{C_{4,1} * C_{4,2} * C_{44,10}}{C_{52,13}} \\ &= \frac{\frac{4!}{1!3!} * \frac{4!}{2!2!} * \frac{44!}{10!34!}}{\frac{52!}{13!39!}} \\ &= 0.0937777812328. \end{aligned}$$

Dessa forma a probabilidade P de se obter exatamente 1 ás e 2 reis é $P = 0.0937777812328$.

b) Qual é a probabilidade de que a mão contenha exatamente um ás, dado que contém exatamente dois reis?

Seja

$$\begin{aligned} R_n &= \{\text{Número } n \text{ de reis que uma mão contém}\}, \\ A_n &= \{\text{Número } n \text{ de ases que uma mão contém}\}. \end{aligned}$$

A quantidade desejada pode ser escrita da seguinte forma

$$P(A_1|R_2) = \frac{P(A_1 \cap R_2)}{P(R_2)}.$$

Passo 1: Calculando o denominador:

Dois espaços já estão preenchidos por reis, então

$$C_{4,2} * C_{48,11}.$$

Pois existem 4 reis para 2 espaços e o resto das cartas irão ocupar os 11 espaços restantes.

Passo 2: Calculando a interseção:

$$C_{4,2} * C_{4,1} * C_{44,10},$$

pois, existem 4 reis que vão ocupar 2 espaços, 4 ases para ocupar 1 espaço e 44 cartas para ocupar os demais 10 espaços.

Passo 3: Calculando a probabilidade:

$$\begin{aligned} P &= \frac{C_{4,2} * C_{4,1} * C_{44,10}}{C_{4,2} * C_{48,11}} \\ &= \frac{C_{4,1} * C_{44,10}}{C_{48,11}} \\ &= \frac{\frac{4!}{1!3!} * \frac{44!}{10!34!}}{\frac{48!}{11!37!}} \\ &= 0.439253777367. \end{aligned}$$

Portanto, a chance P de se obter 1 ás dado que a mão tem 2 reis é $P = 0.439253777367$.

- 8) Suponha que $\Omega = \{abc, acb, cab, cba, bca, bac, aaa, bbb, ccc\}$ e que cada um dos nove eventos elementares ocorra com igual probabilidade. Seja A_k o evento de que a k -ésima letra seja b . Os eventos A_1 e A_2 são independentes?

Para que os eventos sejam independentes a igualdade $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ deve ser verdade.

Temos

$$A_1 = \{bca, bac, bbb\} \text{ e } A_2 = \{abc, cba, bbb\}.$$

Então as probabilidades são

$$P(A_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Pois temos 3 casos favoráveis e 9 casos totais.

$$P(A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

O conjunto A_2 tem 3 elementos e Ω tem 9 elementos.

$$(A_1 \cap A_2) = \{bbb\}.$$

Então

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{9}.$$

Verificando a igualdade

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Substituindo

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} &= \frac{1}{3} * \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{9} &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Dessa forma, os eventos são independentes pois $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$.

- 9) Jane tem três filhos. Defina os eventos:

$$A = \{\text{todos os filhos são do mesmo sexo}\}$$

$$B = \{\text{há no máximo um menino}\}$$

$$C = \{\text{a família inclui um menino e uma menina}\}.$$

Temos que

$$\Omega = \{FFF;FFM;FMF;MFF;MMF;MFM;FMM;MMM\}.$$

Onde cada elemento representa o trio de filhos. a) A é independente de B ?

Se A e B são independentes então $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Calculando probabilidades $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Verificando a igualdade,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{4} * \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Portanto, A e B são independentes entre si pois a igualdade $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ é satisfeita.

b) A é independente de C ?

De forma análoga a a).

Calculando probabilidades

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap C) = 0.$$

A interseção de A e C é vazia pois C requer os dois sexos e A requer que todos sejam do mesmo sexo.

Calculando igualdade

$$P(B \cap C) = P(A)P(C)$$

$$0 = \frac{1}{4} * \frac{3}{4}$$

$$0 \neq \frac{3}{16}.$$

Portanto, A e C não são independentes.

- 10) Uma moeda honesta é lançada repetidamente. Mostre que, com probabilidade um, uma cara aparecerá mais cedo ou mais tarde.

Seja

$$C = \{\text{O resultado é cara}\},$$

$$\overline{C} = \{\text{O resultado não é cara}\}.$$

Para que cara nunca seja um resultado, então temos que ter

$$P(\overline{C}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Note que $P(\overline{C})$ tende a 0 quando n vai ao infinito. Pela probabilidade complementar temos que

$$P(C) = 1 - P(\overline{C})$$

$$P(C) = 1 - 0$$

$$P(C) = 1.$$

Portanto, cara acontecer em algum momento é um evento de probabilidade 1.

- 11) (A ruína do jogador) Um jogador começa com $k \in [0, n]$ reais e, a cada rodada ele ou pula uma rodada, ou aposta e ganha 1 real, ou aposta e perde 1 real todos os três casos ocorrendo com igual probabilidade. Se ele chegar a n reais, ele ganha. Se ele chegar a 0 reais, ele perde.

a) Mostre que ele eventualmente perde ou ganha.

Para mostrar que o jogo eventualmente acaba, ou seja, o jogador ganha ou perde, basta mostrar que o jogo continuar infinitamente não pode acontecer.

Note que os únicos estados absorventes desse jogo são apenas ganhar ou perder e que é possível acessar ambos estados por qualquer outro, sendo esses conseguir mais um real, perder um real ou acontecer nada. Dessa forma, é impossível que o jogador nunca ganhe ou perca pois o estado de acontecer nada não é absorvente.

b) Qual a probabilidade de ele ganhar?

Seja P_k o estado atual que o jogador se encontra. Assim, P_{k+1} e P_{k-1} são os estados de ganhar um real ou perder um real respectivamente.

Dessa forma, temos que dentro do estado P_k existem 3 estados possíveis cada um com $\frac{1}{3}$ de chance de ocorrer, então

$$P_k = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}P_{k+1} + \frac{1}{3}P_{k-1},$$

$$3P_k = P_k + P_{k+1} + P_{k-1},$$

$$2P_k = P_{k+1} + P_{k-1}.$$

Podemos reescrever como a equação discreta

$$2\theta^k = \theta^{k+1} + \theta^{k-1}.$$

Para $k=1$, temos

$$2\theta = \theta^2 + 1.$$

Resolvendo a equação de segundo grau

$$\theta^2 - 2\theta + 1 = 0$$

$$(\theta - 1)^2 = 0$$

$$\theta - 1 = 0$$

$$\theta = 1.$$

A solução geral de uma equação discreta caso as raízes sejam iguais é dada por

$$y^n = Ar^n + Bnr^n.$$

Escrevendo essa equação discreta em sua forma geral

$$P_k = A_1\theta_1^k + A_2k\theta_2^k = A_1 + A_2k.$$

Basta achar as constantes A_1 e A_2 . Temos as condições de contorno $\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_n = 1 \end{cases}$.

Substituindo na forma geral

$$P_0 = A_1 + A_2 * 0$$

$$P_0 = A_1 = 0$$

$$A_1 = 0$$

$$P_n = A_1 + A_2 n$$

$$P_n = 0 + A_2 n$$

$$P_n = A_2 n = 1$$

$$A_2 = \frac{1}{n}.$$

Substituindo A_1 e A_2 na forma geral original, temos,

$$P_k = A_1 + A_2 k$$

$$P_k = 0 + \frac{1}{n} * k$$

$$P_k = \frac{k}{n}.$$

Então a chance de ganhar é igual a $\frac{k}{n}$ sendo k o dinheiro que o jogador começa e n o número que se precisa atingir para ganhar.

7 Variáveis Aleatórias

Definição 11. Uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função real, definida em Ω , tomando valores em $\mathbf{R}$ tal que para qualquer $x \in \mathbf{R}$ o conjunto $A_x = \{w \in \Omega | X(w) \leq x\}$ é um evento.

7.1 Função de Distribuição de Probabilidade

Definição 12. Função de Distribuição de Probabilidade é definida por

$$\begin{aligned} F_X : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ X &\rightarrow F_X(x) = P(A_x) = P(X \leq x), \end{aligned} \tag{1}$$

onde A_x é o evento definido anteriormente.

Exemplo 5. Considere a variável aleatória que retorna o número da face superior ao jogar um dado. Seja o ponto-amostra w_i tal que $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Logo $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$. Considere o mapa de Ω em $\mathbf{R}$ definido por

$$X(w_i) = (i - 3)^2$$

Logo

$$A_x = \begin{cases} \emptyset, & -\infty < x < 0, \\ \{w_3\}, & 0 \leq x < 1, \\ \{w_2, w_3, w_4\}, & 1 \leq x < 4, \\ \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, & 4 \leq x < 9, \\ \Omega, & 9 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Para essa variável aleatória, temos

$$F_X = P(A_x) = \begin{cases} P(\emptyset), & -\infty < x < 0, \\ P(\{w_3\}), & 0 \leq x < 1, \\ P(\{w_2, w_3, w_4\}), & 1 \leq x < 4, \\ P(\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}), & 4 \leq x < 9, \\ P(\Omega), & 9 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Por fim, temos a seguinte função de distribuição de probabilidade

$$F_X = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ \frac{1}{6}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 4, \\ \frac{5}{6}, & 4 \leq x < 9, \\ 1, & 9 \leq x < \infty. \end{cases}$$

■

7.2 Propriedades da Função de Distribuição de Probabilidade

A função de distribuição possui as seguintes propriedades:

- (i) $F_X(-\infty) = 0$.
- (ii) $F_X(+\infty) = 1$.
- (iii) F_X é monótona não decrescente.
- (iv) F_X é contínua pela direita.

8 Classificação de Variáveis Aleatórias

Preâmbulo 2. Seja a função degrau unitário definida por $u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$

Definição 13. Variável Aleatória Discreta

Uma variável aleatória X é dita discreta quando sua função de distribuição de probabilidade se escreve como

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)u(x - x_i).$$

No caso de variáveis aleatórias discretas, a probabilidade associada a um evento $I \subset \mathbb{R}$ qualquer pode ser escrita como

$$P(I) = \sum_{x_i \in I} P(X = x_i).$$

Definição 14. Variável Aleatória Contínua

Uma variável aleatória X é dita contínua quando sua função distribuição de probabilidade é contínua e diferenciável em quase todos os pontos (F_X é não-diferenciável em apenas um número contável de pontos)

Definição 15. Variável Aleatória Mista

Uma variável aleatória X é dita mista quando sua função distribuição de probabilidade se escreve como a soma de uma função $C_X(x)$ contínua e diferenciável em quase todos os pontos e uma função $D_X(x)$ que se expressa como a soma ponderada de funções degrau, ou seja, $F_X(x) = C_X(x) + D_X(x)$.

9 Função Densidade de Probabilidade

Definição 16. Função de Densidade de Probabilidade Contínua

Para uma função de probabilidade contínua, o modo de se obter sua densidade de probabilidade é

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Definição 17. Função de Densidade de Probabilidade Discreta ou Mista

Para uma função de probabilidade contínua, o modo de se obter sua densidade de probabilidade é

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} C_X(x) + \sum_i P(X = x_i) \delta(x - x_i)$$

Onde $\delta(\cdot) = \frac{d}{dx} u(\cdot)$.

Propriedade 2. A Função de Densidade de Probabilidade possui as seguintes propriedades,

- (i) $\int_{-\infty}^x p_X(u)du = F_X(x)$.
- (ii) $p_X(x) \geq 0$.
- (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$.
- (iv) $\int_a^b p_X(x)dx = P(X \in (a, b])$.
- (v) $\int_I p_X(x)dx = P(X \in I)$.

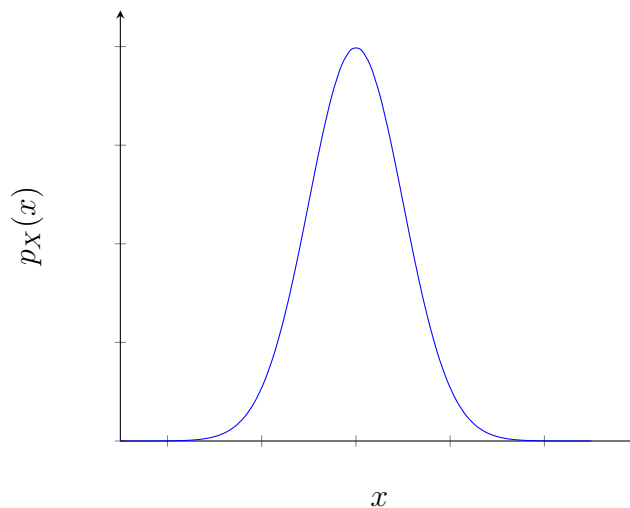
10 Exemplos de Funções de densidade

10.1 Normal ou Gaussiana

Definição 18. A distribuição normal tem a forma

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} ; m \in \mathbb{R} ; \sigma > 0,$$

e o seguinte gráfico:



10.2 Uniforme

Definição 19. A distribuição uniforme tem a forma

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{em outros pontos.} \end{cases}$$

10.3 Exponencial

Definição 20. A distribuição exponencial tem forma

$$p_X(x) = ae^{-ax}u(x), \quad a > 0$$

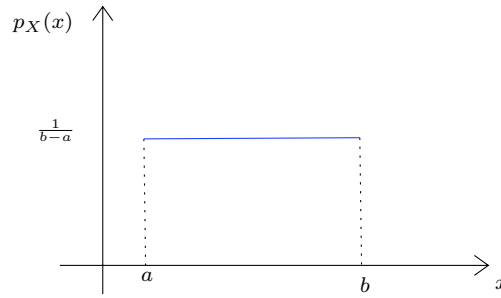


Figura 1: Distribuição uniforme.

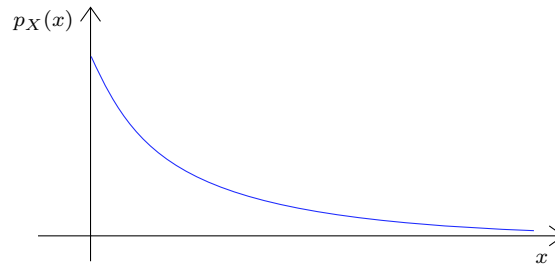


Figura 2: Distribuição exponencial.

10.4 Poisson

Definição 21. A distribuição de Poisson tem forma

$$p_X(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i e^{-a}}{i!} \delta(x - i); \quad a > 0.$$

10.5 Binomial

Definição 22. A distribuição binomial tem forma

$$p_X(x) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \delta(x - i), \quad 0 \leq p \leq 1, \quad q = 1 - p.$$

11 Lista 2

- 1) Considere o lançamento de uma moeda viciada, tal que a probabilidade de sair cara é p . Seja X a variável aleatória que retorna o número de caras obtidas na jogada.

a) Construa os conjuntos

$$A_x = \{w \in \Omega : X(w) \leq x\}.$$

b) a função distribuição

Temos que $P(C) = p$

a)

$$A_x = \begin{cases} \emptyset; & -\infty \leq x < 0 \\ \{K\}; & 0 \leq x < 1 \\ \{K, C\}, & 1 \leq x. \end{cases}$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1 - p; & 0 \leq x < 1 \\ 1; & 1 \leq x. \end{cases}$$

- 2) Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e quatro pretas. Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória X igual ao número de bolas pretas restantes na urna. Obtenha a distribuição de X .

Seja $T = \{\text{Número de bolas pretas retiradas da urna}\}$.

Podemos utilizar a distribuição hipergeométrica para calcular $P(T)$ porque essa distribuição calcula a quantidade de k sucessos em n retiradas sem reposição para uma população de tamanho N e que contém exatamente K sucessos.

A distribuição hipergeométrica se dá por

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Basta substituir os valores na distribuição e calcular a probabilidade

Para nenhuma bola preta retirada, restam quatro na urna

$$k = 0, n = 3, N = 7, K = 4$$

$$P(T = 0) = \frac{1}{35}.$$

Para uma bola retirada, restam três na urna

$$k = 1, n = 3, N = 7, K = 4$$

$$P(T = 1) = \frac{4}{35}.$$

Para duas bolas retiradas, restam duas na urna

$$k = 2, n = 3, N = 7, K = 4$$

$$P(T = 2) = \frac{18}{35}.$$

Para três bolas retiradas, resta uma na urna

$$k = 3, n = 3, N = 7, K = 4$$

$$P(T = 3) = \frac{12}{35}.$$

Distribuição $P(X = x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ \frac{12}{35}; & 1 \leq x < 2 \\ \frac{30}{35}; & 2 \leq x < 3 \\ \frac{34}{35}; & 3 \leq x < 4 \\ 1; & 4 \leq x. \end{cases}$$

- 3) Encontre a função distribuição de probabilidade e calcule o valor R_0 tal que a probabilidade de ter $r > R_0$ é $1/e$.

A função de distribuição é definida pela integral da função densidade de probabilidade de $-\infty$ até R .

$$F(R) = \int_{-\infty}^R p_r(x) dx$$

$$F(R) = \int_0^R \frac{x}{b} e^{\frac{-x^2}{2b}} dx$$

$$F(R) = \frac{1}{b} \int_0^R e^{\frac{-x^2}{2b}} x dx.$$

Pelo método da substituição, temos

$$u = \frac{-x^2}{2b}$$

$$du = \frac{-x}{b} dx$$

$$x dx = -b du.$$

Substituindo na integral e ajustando intervalo da integral

$$F(R) = \frac{1}{b} \int_0^{\frac{-R^2}{2b}} e^u (-b) du$$

$$F(R) = \frac{-b}{b} \int_0^{\frac{-R^2}{2b}} e^u du$$

$$F(R) = - \int_0^{\frac{-R^2}{2b}} e^u du.$$

Pelo TFC, temos

$$F(R) = -(e^{\frac{-R^2}{2b}} - e^0)$$

$$F(R) = (1 - e^{\frac{-R^2}{2b}}).$$

A pergunta quer saber sobre a probabilidade $P(r > R_0)$, porém a função de distribuição nos dá $P(r \leq R_0)$ logo podemos calcular o que precisamos pelo seu complementar

$$P(r > R_0) = 1 - P(r \leq R_0)$$

$$P(r > R_0) = 1 - (1 - e^{\frac{-R_0^2}{2b}})$$

$$P(r > R_0) = e^{\frac{-R_0^2}{2b}}.$$

Queremos que $P(r > R_0) = \frac{1}{e}$

$$P(r > R_0) = e^{\frac{-R_0^2}{2b}}$$

$$\frac{1}{e} = e^{\frac{-R_0^2}{2b}}$$

$$e^{-1} = e^{\frac{-R_0^2}{2b}}$$

$$-1 = \frac{-R_0^2}{2b}$$

$$1 = \frac{R_0^2}{2b}$$

$$2b = R_0^2$$

$$R_0 = \sqrt{2b}.$$

- 4) a) Construa a variável aleatória que descreve a pontuação de um jogador, construindo o contra-domínio.

Para três arremessos, temos as seguintes possibilidades de combinações de pontos

$$\Omega = \{(10, 10, 10); (6, 6, 6); (2, 2, 2); (2, 6, 6); (2, 2, 6); (2, 10, 10); (6, 10, 10); (2, 6, 10); (2, 2, 10); (6, 6, 10)\}.$$

Logo, o contra-domínio para a pontuação total em três arremessos é

$$Im = \{6, 10, 14, 18, 22, 26, 30\}.$$

- b) Construa os conjuntos

$$A_x = \{w \in \Omega : X(w) \leq x\}.$$

$$A_x = \begin{cases} 0; & x < 6 \\ (2, 2, 2); & 6 \leq x < 10 \\ (2, 2, 2), (2, 2, 6); & 10 \leq x < 14 \\ (2, 2, 2), (2, 2, 6), (2, 6, 6), (2, 2, 10); & 14 \leq x < 18 \\ (2, 2, 2), (2, 2, 6), (2, 6, 6), (2, 2, 10), (6, 6, 6), (2, 6, 10); & 18 \leq x < 22 \\ (2, 2, 2), (2, 2, 6), (2, 6, 6), (2, 2, 10), (6, 6, 6), (2, 6, 10), & \\ (2, 10, 10), (6, 6, 10); & 22 \leq x < 26 \\ (2, 2, 2), (2, 2, 6), (2, 6, 6), (2, 2, 10), (6, 6, 6), (2, 6, 10), & \\ (2, 10, 10), (6, 6, 10), (6, 10, 10); & 26 \leq x < 30 \\ (2, 2, 2), (2, 2, 6), (2, 6, 6), (2, 2, 10), (6, 6, 6), (2, 6, 10), & \\ (2, 10, 10), (6, 6, 10), (6, 10, 10), (10, 10, 10); & 30 \leq x. \end{cases}$$

- c) Construa a função distribuição.

Calculando probabilidades de cada pontuação do contra-domínio

$$\begin{cases} P(X = 6) : (2, 2, 2) \rightarrow \frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8} \\ P(X = 10) : (2, 2, 6) \rightarrow 3\left(\frac{1}{2}^2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \\ P(X = 14) : (2, 6, 6), (2, 2, 10) \rightarrow 3\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}^2\right) + 3\left(\frac{1}{2}^2 \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{24} \\ P(X = 18) : (6, 6, 6), (2, 6, 10) \rightarrow \frac{1}{3}^3 + 6\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{54} \\ P(X = 22) : (2, 10, 10), (6, 6, 10) \rightarrow 3\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}^2\right) + 3\left(\frac{1}{3}^2 \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{72} \\ P(X = 26) : (6, 10, 10) \rightarrow 3\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}^2\right) = \frac{1}{36} \\ P(X = 30) : (10, 10, 10) \rightarrow \frac{1}{6}^3 = \frac{1}{216}. \end{cases}$$

Note que é necessário calcular as permutações com repetição de cada uma das combinações de pontos mostradas.

Dessa forma a função distribuição de probabilidade se dá por

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 6 \\ \frac{1}{8}; & 6 \leq x < 10 \\ \frac{3}{8}; & 10 \leq x < 14 \\ \frac{2}{3}; & 14 \leq x < 18 \\ \frac{47}{54}; & 18 \leq x < 22 \\ \frac{69}{72}; & 22 \leq x < 26 \\ \frac{215}{216}; & 26 \leq x < 30 \\ 1; & 30 \leq x. \end{cases}$$

12 Processos Estocásticos

Definição 23. Um processo estocástico é uma aplicação definida por:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{F} \\ w &\rightarrow X(t, w), t \in T, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $w \in \Omega$ é um ponto-amostra que é associado a uma função real de parâmetro $t \in T$, sendo $\mathbb{F}$ uma família de funções de t .

Definição 24 (Definição alternativa). Dado um conjunto de estados S e um conjunto de parâmetros T , um processo estocástico é dado por uma coleção de elementos de S ,

$$\{X(t, w) : t \in T, w \in \Omega\}.$$

Para cada $t \in T$ fixo, $X(t, \cdot)$ é uma VA e para cada ponto-amostra w fixo, $X(\cdot, w)$ é uma função do tempo (realização). Em outras palavras, um processo estocástico pode também ser visto como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto de parâmetros,

$$\{X_t : t \in T\},$$

onde para cada t , a variável aleatória X_t assume valores em S .

12.1 Representação de Processos Estocásticos

Seja $X(t, w)$ um processo estocástico. Então $X(t, w)$ pode representar cinco situações diferentes

- (i) Uma família de funções de tempo(t e w variáveis);
- (ii) Uma única função de tempo(t variável e w fixo);
- (iii) Uma variável aleatória(t fixo e w variável);
- (iv) Um vetor aleatório($t_1, t_2, \dots, t_n$ fixos e w variável);
- (v) Um único número real(t e w fixos).

12.2 Classificação

Definição 25. Processo Estocástico Discreto: Assume valores em um conjunto discreto.

Definição 26. Processo Estocástico Contínuo: Assume valores em um conjunto contínuo.

Definição 27. Processo Estocástico de Parâmetro Contínuo: Os parâmetros assumem valores em um conjunto contínuo.

Definição 28. Processo Estocástico de Parâmetro Discreto: Os parâmetros assumem valores em um conjunto discreto.

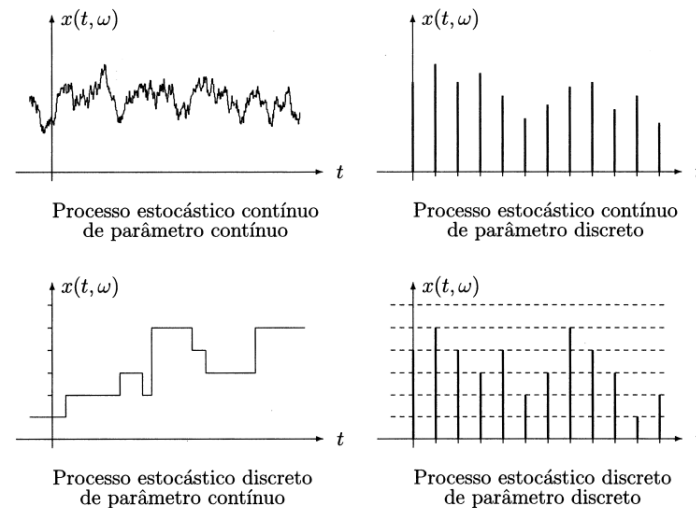


Figura 3: Classificação de Processos Estocásticos: funções-amostras típicas

13 Lista 3

1) Classifique quanto às propriedades listadas abaixo os seguintes processos:

1. Número de e-mails recebidos por dia desde a criação do email.

Parâmetro: Discreto(incrementos de 1 dia).

Duração: Finita(criação do email até o dia atual).

Espaços de Estados: Discreto(número de emails recebidos é inteiro).

2. Mercado de ações atualizado de hora em hora de 2021 a 2025.

Parâmetro: Discreto(é contado em incrementos de 1 hora).

Duração: Finito(2021 a 2025).

Espaços de Estados: Contínuo(a variação está contida nos reais).

3. Passeio aleatório sobre os inteiros.

Parâmetro: Discreto.

Duração: Infinito.

Espaços de Estados: Discreto(a variável aleatória só pode assumir valores inteiros).

4. Número de mensagens recebidas no celular ao longo do dia.

Parâmetro: Contínuo(intervalo de tempo).

Duração: Finito(24 horas).

Espaços de Estados: Discreto(Número de mensagens).

5. Variações dos potenciais elétricos do cérebro durante um exame.

Parâmetro: Contínuo(intervalo de tempo).

Duração: Finito(Duração do exame).

Espaços de Estados: Contínuo(variação de potencial pode ser qualquer real).

6. Batimentos cardíacos por minuto ao longo de um dia.

Parâmetro: Discreto(é contado em incrementos de 1 minuto).

Duração: Finito(24 horas).

Espaços de Estados: Discreto(o número de batimentos é inteiro).

7. Criação de novas galáxias desde o bigbang.

Parâmetro: Contínuo(intervalo de tempo).

Duração: Finita(big bang até dia atual).

Espaços de Estados: Discreto(o número de galáxias é inteiro).

- 2) Classifique quanto a discreto ou contínuo o seguinte campo estocástico: seja um gás de partículas interagindo de forma aleatória, caracterizado por $(t, T(t), P(t))$, onde t é o tempo, $T(t)$ é a variável aleatória da temperatura e $P(t)$ é a variável aleatória da pressão.

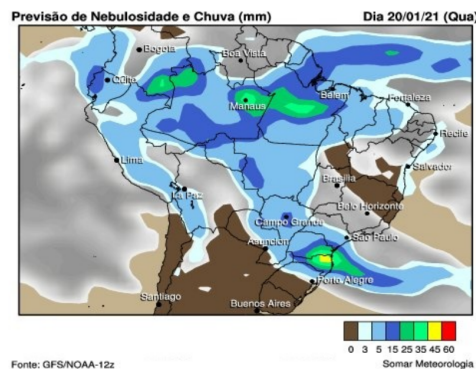
Esse campo aleatório é contínuo pela natureza de suas variáveis aleatórias.

- 3) Classifique quanto a discreto ou contínuo o seguinte campo estocástico: considere as informações meteorológicas disponibilizadas pelo aplicativo hora a hora, caracterizadas por $(t, T(t), U(t))$, onde t é o tempo, $T(t)$ é a temperatura e $U(t)$ é a umidade relativa do ar.

O tempo é discreto.

Temperatura e umidade são contínuas.

- 4) Considere a previsão de chuva dia a dia, no modelo da imagem abaixo.
Como você descreveria esse campo estocástico? (A n-upla e quanto a discreto ou contínuo).



Atribuiria a seguinte n-upla: $(t, V(t))$ onde t é o tempo discreto, $V(t)$ é o volume de chuva em mm e discreto conforme mostra a imagem.

- 5) Suponha que a cada passo de tempo $t \in T = [0, 1, 2, \dots]$ jogamos um dado e anotamos o valor obtido na face voltada para cima X_t . Qual a função massa de probabilidade de X_i ?

A função massa de probabilidade de X_t é

$$f_{X_t}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{se } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- 6) Uma linha de produção de resistores de 1000, a resistência real é R com distribuição uniforme entre $[950, 1050]$. Um testador toma 1 resistor por segundo e mede sua resistência exata. Seja $R(n)$ o número de resistores entre $[990, 1010]$ retirados no minuto n . Qual a função massa de probabilidade?

Primeiro, vamos calcular a chance de se obter um resistor no intervalo de $[990, 1010]$ dado que $R(n)$ tem distribuição uniforme em $[950, 1050]$.

$$P(R(n)) = \frac{1}{1050 - 950}$$

$$P(R(n)) = \frac{1}{100}.$$

Para o intervalo de $[950, 1050]$ basta calcular a área sob a curva

$$P = \int_{990}^{1010} \frac{1}{100}$$

$$P = \frac{1}{100}(1010 - 990)$$

$$P = \frac{20}{100}.$$

Porém, temos 60 resistores então a função massa de probabilidade de $R(n)$ é

$$f_R(x) = \begin{cases} \binom{60}{k} \frac{2^k}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{60-k}, & \text{se } x \in [990, 1010], \quad n \in [0, \dots, 60] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- 7) Qual a função massa de probabilidade num processo de Bernoulli $\{X_n\}$?

Em um processo de Bernoulli X_n de probabilidade p a função massa de probabilidade se dá por

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = 1 \\ 1 - p, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- 8) (Processo de Bernoulli) Seja $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ o número de caras em n ensaios com uma moeda honesta. Esse processo possui incrementos estacionários?

O processo de Bernoulli possui incrementos estacionários pois seja $S_s = \sum_{i=1}^s X_i$. Por definição de Incrementos estacionários temos

$$P \left[\sum_{i=1}^{t+s} X_i - \sum_{i=1}^t X_i = k \right] = P \left[\sum_{i=1}^s X_i = k \right]. \quad (3)$$

Portanto, como S_n satisfaz a definição de incrementos estacionários pois o processo de Bernoulli tem variáveis X_i são independentes então o processo de Bernoulli tem incrementos estacionários.

- 9) Considere o mesmo processo de Bernoulli do exercício anterior. Esse processo possui incrementos independentes?

Seja I_s um incremento do processo de Bernoulli com $s \in \mathbb{N}$ onde $n < m < k$.

$$I_1 = S_m - S_n = X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_m$$

$$I_2 = S_k - S_m = X_{m+1} + X_{m+2} + \cdots + X_k.$$

O incremento I_1 depende apenas do conjunto de variáveis $\{X_{n+1}, \dots, X_m\}$.

O incremento I_2 depende apenas do conjunto de variáveis $\{X_{m+1}, \dots, X_k\}$.

Como os conjuntos tem índices $\{n+1, \dots, m\}$ e $\{m+1, \dots, k\}$ então são disjuntos, as somas I_1 e I_2 são independentes entre si.

Portanto, o processo de Bernoulli tem variáveis independentes.

14 Cadeias de Markov

Definição 29. Um processo é chamado de cadeia de Markov se satisfaz a condição de Markov.

$$P[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] = P[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n].$$

Definição 30. Uma matriz de transição é dada por $P = (p_{ij})$, $p_{ij} = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$.

Propriedade 3. Perceba que uma matriz de transição tem 2 propriedades principais:

- (i) $p_{ij} \geq 0$.
- (ii) $\sum_j p_{ij} = 1$, ou seja a soma de cada linha é igual a 1.

14.1 Classificação das Cadeias de Markov

14.1.1 Cadeia de Markov Homogênea

Definição 31. Uma cadeia de Markov é homogênea se

$$P[X_{t+1} = j \mid X_t = i] = P[X_1 = j \mid X_0 = i],$$

isto é, a probabilidade de transição não depende no tempo inicial. Todo processo de Markov é assumido ser homogêneo a não ser que seja dito o contrário.

14.1.2 Cadeia de Markov Recorrente

Definição 32. Uma cadeia de Markov é recorrente se

$$P[X_n = i, \text{ para algum } n \geq 1 \mid X_0 = i] = 1$$

e é transiente caso contrário.

Uma forma alternativa de caracterizar a transiência e a recorrência é dada por:

- (i) j é recorrente se $\sum_n p_{jj}(n) = \infty$, ou seja, a soma diverge.
- (ii) j é transiente se $\sum_n p_{jj}(n) < \infty$, ou seja, a soma converge.

14.1.3 Tempo Médio de Recorrência

Definição 33. O tempo médio de recorrência se dá por

$$\mu_i = E[T_i \mid X_0 = i] = \begin{cases} \sum_n n f_{ii}(n), & i \text{ é recorrente} \\ \infty, & i \text{ é transiente} \end{cases}.$$

Um estado recorrente é nulo se $\mu_i = \infty$ e não nulo se $\mu_i < \infty$.

Definição 34. Seja $d(i) = \text{mdc}\{n : p_{ii}(n) > 0\}$. Então i é periódico se $d(i) > 1$ e aperiódico se $d(i) = 1$.

14.1.4 Comunicação

Definição 35. Dizemos que i se comunica com j ($i \rightarrow j$) se $p_{ij}(m) > 0$ para algum $m \geq 0$ e i se intercomunica com j ($i \longleftrightarrow j$) se $(i \rightarrow j)$ e $(j \rightarrow i)$

Propriedade 4. Se $(i \longleftrightarrow j)$, então:

- (i) i e j tem o mesmo período.
- (ii) i é transiente se, e somente se, j é transiente.
- (iii) i é nulo recorrente se, e somente se, j é nulo persistente.

14.1.5 Estados

Definição 36. Um conjunto C de estados é dito

- (i) Fechado se $p_{ij} = 0$ para todo $i \in C$ e $j \notin C$.
- (ii) Irredutível se $(i \longleftrightarrow j)$ para todo $i, j \in C$.

Se C tem apenas um estado, esse estado é chamado de absorvente.

15 Lista 4

- 1) Um dado é lançado repetidamente. Quais das seguintes alternativas são cadeias de Markov? Para as que são, escreva a matriz de transição.
 - a) O maior número X_n aparece no n -ésimo lançamento.

Seja Y_n o resultado do n -ésimo lançamento do dado. Os Y_n são independentes e identicamente distribuídos, com $P(Y_n = s) = \frac{1}{6}$ para $s \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sim, é uma cadeia de Markov.

O maior número para instante n será o máximo entre o maior número até instante $n - 1$ e o resultado do instante n . $X_{n+1} = \max(X_n, Y_{n+1})$. Como Y_{n+1} resultado é independente dos resultados do passado, então só precisamos saber o valor atual de X_n .

Matriz de Transição:

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) O número N_n de quantidade do número seis em n lançamentos.

Seja X_n o resultado do lançamento do dado no instante n . A probabilidade P do resultado ser 6 é $\frac{1}{6}$. O valor $N_{n+1} = N_n + I(X_{n+1})$. I é uma função indicadora que retorna 1 caso X_n for 6 e 0 caso contrário. Como X_n é independente dos lançamentos passados e precisamos apenas do lançamento atual e o valor de N_n , então é um processo de Markov.

Como a chance de sair 6 é $P = \frac{1}{6}$ e a chance de não sair 6 é $P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, então podemos construir a matriz de transição do seguinte modo:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pois a chance de N_n permanecer no mesmo número é $\frac{5}{6}$ e a chance de somar 1 é $\frac{1}{6}$.

c) No tempo r , o tempo C_r desde o número seis mais recente.

Seja X_r , o resultado do lançamento de um dado no instante r . Sabemos que a probabilidade P de sair um 6 é de $P = \frac{1}{6}$. C_r é o processo que mede quanto tempo faz que o último 6 apareceu.

Se no lançamento X_{r+1} sair um 6, C_r se torna 0.

Se nesse mesmo lançamento não sair um 6, C_r aumenta em 1. Então $C_{r+1} = C_r + 1$.

Portanto, como apenas o lançamento atual e o valor atual de C_r importa, então C_r é uma cadeia de Markov.

C_r tem $P = \frac{1}{6}$ de se tornar 0 e $P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ chance de somar 1, então sua matriz de transição se dá por:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \dots \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

d) No tempo r , o tempo B_r até o próximo número seis.

Seja $B_n = \{\text{Número de jogadas até o próximo número 6}\}$

Sejam os elementos p_{ij} da matriz de transição T .

Dado que esteja no estado 0 a chance de que se esteja no estado 0 novamente é $\frac{1}{6}$, dado que se esteja no estado 0 a chance de ir para o estado 1 é $\frac{5}{6} * \frac{1}{6}$, dado que estamos no estado 0, a chance de ir para o estado 2 é $(\frac{5}{6})^2 * \frac{1}{6}$ e assim sucessivamente sendo $(\frac{5}{6})^j * \frac{1}{6}$ onde $j = n - 1$ sendo n o passo de tempo atual.

Agora dado que estou no estado 1, necessariamente, a próxima jogada vou estar no estado 0.

Se estou no 2, então na próxima jogada estarei no estado 1 e assim sucessivamente.

Como só é necessário saber o estado atual para saber o próximo, então é um processo de Markov.

A matriz de Transição é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} * \frac{1}{6} & (\frac{5}{6})^2 * \frac{1}{6} & (\frac{5}{6})^3 * \frac{1}{6} & (\frac{5}{6})^4 * \frac{1}{6} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- 2) Seja X uma cadeia de Markov. Quais das seguintes alternativas são cadeias de Markov?
- a) X_{m+r} para $r \geq 0$.
Como X é cadeia de Markov homogênea, então $P[X_{t+1} = j | X_t = i] = P[X_1 = j | X_0 = i]$.
Como apenas o passo de tempo varia então X_{m+r} é cadeia de Markov.
- b) X_{2m} para $m \geq 0$.
 X é uma cadeia de Markov homogênea, então como apenas o tempo varia, X_{2m} é cadeia de Markov
- c) A sequência de pares (X_n, X_{n+1}) para $n \geq 0$.
Como cada elemento do par é uma cadeia de Markov, então o par é uma cadeia de Markov.
- 3) Seja $\{X_n : n \geq 1\}$ uma variável aleatória independente, identicamente distribuída e $X_n \in \mathbb{Z}$.
Seja $S_n = \sum_{r=1}^n X_r$, com $S_0 = 0$, $Y_n = X_n + X_{n-1}$ com $X_0 = 0$ e $Z_n = \sum_{r=0}^n S_r$. Quais das seguintes alternativas são cadeias de Markov?

a) S_n ?

X_n são variáveis independentes e $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, onde S_{n+1} é o próximo estado, S_n é o estado atual e X_{n+1} é a variável independente na próxima jogada. Logo, é de Markov.

b) Y_n ?

Vamos verificar se é de Markov. Para ser de Markov, o estado $n + 1$ deve depender apenas do estado anterior e de alguma variável independente obtida no tempo $n + 1$. Note que

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_1 + X_2 = Y_1 + X_2,$$

O que implica que

$$X_2 = Y_2 - Y_1$$

$$Y_3 = X_2 + X_3 = Y_2 - Y_1 + X_3$$

. Dessa forma é possível perceber que o estado no tempo 3 depende do estado no tempo 2 e da variável aleatória no tempo 3, porém também depende do estado no tempo 1. Portanto, Y_n não é de Markov.

c) Z_n ?

Vamos verificar se Z_n é uma cadeia de Markov.

Temos que $Z_n = \sum_{k=0}^n S_k$.

Então,

$$n=1$$

$$Z_1 = S_1$$

$$n=2$$

$$Z_2 = S_1 + S_2.$$

Assim, $Z_2 = Z_1 + S_2$ implica $S_2 = Z_2 - Z_1$ e

$$n=3$$

$$Z_3 = Z_2 + S_3 \rightarrow Z_2 + S_2 + X_3$$

$$= 2Z_2 - Z_1 + X_3.$$

Onde Z_3 é o estado no tempo 3, Z_2 o estado no tempo 2, Z_1 o estado no tempo 1 e X_3 a variável independente do tempo 3. Portanto, Z_n não pode ser de Markov.

d) A sequência de pares (S_n, Z_n) ?

Dado o presente (S_n, Z_n) , o próximo elemento é dado por (S_{n+1}, Z_{n+1}) onde

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + X_{n+1} \\ &\text{e} \\ Z_{n+1} &= Z_n + S_n + X_{n+1}. \end{aligned}$$

Note que como temos S_n , pois temos a dupla (S_n, Z_n) , agora é possível construir o próximo passo.

4) Classifique os estados das cadeias de Markov com matrizes de transição.

a) $\begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix}.$

Não sabemos o valor de p , por isso vou separar em alguns casos e analisá-los.

Caso 1: $p = 0$:

Para esse caso temos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que uma vez definido o caso inicial, nele permanecemos. Logo, nesse caso todos os estados dessa cadeia são absorventes.

Caso 2: $p = 1/2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O somatório de cada estado é igual a 1, então todos os estados são recorrentes não-nulos e a cadeia é irredutível pois a cadeia não possui nenhum estado absorvente.

Caso 3: $p \in (0, \frac{1}{2})$

Como o somatório de cada estado é menor que infinito, então todos os estados são recorrentes não-nulos e a cadeia é irredutível pois todos os estados se comunicam ou intercomunicam entre si.

b) $\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$

De forma análoga a a) dividiremos em casos.

Caso 1: $p = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os estados são recorrentes e a cadeia é irreduzível.

Caso 2: $p = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os estados são recorrentes e a cadeia é irreduzível. Assim como o caso anterior.

Caso 3: $p = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A cadeia é irreduzível e os estados são recorrentes.

Caso 4: $p \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$

Note que os valores variam conforme p muda mas os estados continuam sempre sendo recorrentes então a cadeia é irreduzível.

16 Bibliografia

Referências

- [1] José Paulo de Almeida e Albuquerque, José Mauro Pedro Fortes, Weiler Alves Finamore. **Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2008. 1. ed.

- [2] Geoffrey R. Grimett, David R. Stirzaker. **Probability and Random Processes**. New York: Oxford University Press, 2001. 3. ed.